20η Άσκηση

2021-2022

Έως ρυθμό μεταβολής

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $A(0,2)$ και $f(-2)=-8$. Επίσης για την f ισχύει:

$$e^{2f(x)}=e^{2x^3+2x+4}-2e^{x^3+x+2}+2e^{f(x)}\text{ , για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^3+x+2$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Να ορίσετε την συνάρτηση $f\circ g$ με $g(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1\in(0,1)$ τέτοιο ώστε το όριο $\lim\limits_{x\to x_1}\dfrac{1}{(f\circ g)(x)-5}$ να μην υπάρχει.

δ) Υλικό σημείο Μ κινείται επί της γραφικής παράστασης της f και η τετμημένη αυξάνεται με ρυθμό 1 cm/sec. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου που σχηματίζεται από το σημείο Μ, τις προβολές του Μ στους άξονες και την αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή που διέρχεται από το σημείο $K(1,4)$.

Νίκος Τούντας

Λύση

α) $e^{2f(x)}=e^{2x^3+2x+4}-2e^{x^3+x+2}+2e^{f(x)}\Leftrightarrow e^{2f(x)}-2e^{f(x)}=e^{2x^3+2x+4}-2e^{x^3+x+2}\Leftrightarrow$

$e^{2f(x)}-2e^{f(x)}+1=e^{2x^3+2x+4}-2e^{x^3+x+2}+1\Leftrightarrow\left(e^{f(x)}-1\right)^2=\left(e^{x^3+x+2}-1\right)^2\Leftrightarrow$

$\left|e^{f(x)}-1\right|=\left|e^{x^3+x+2}-1\right|$ (1)

Έστω η συνάρτηση $v(x)=e^{f(x)}-1$, $x\in\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$v(x)=0\Leftrightarrow|v(x)|=0\Leftrightarrow\left|e^{f(x)}-1\right|=0\Leftrightarrow\left|e^{x^3+x+2}-1\right|=0\Leftrightarrow e^{x^3+x+2}-1=0\Leftrightarrow$

$e^{x^3+x+2}=1\Leftrightarrow e^{x^3+x+2}=e^0\Leftrightarrow x^3+x+2=0\Leftrightarrow(x+1)(x^2-x+2)=0\Leftrightarrow(x+1=0\Leftrightarrow x=-1)$ ή

$\left(x^2-x+2=0 \text{ αδύνατη}\right)$

Τώρα θα λύσουμε την ανίσωση: $e^{x^3+x+2}-1>0\Leftrightarrow e^{x^3+x+2}>1\Leftrightarrow e^{x^3+x+2}>e^0\Leftrightarrow x^3+x+2>0$.

$x^3+x+2>0\Leftrightarrow(x+1)(x^2-x+2)>0\Leftrightarrow x>-1$ γιατί το τριώνυμο x^2-x+2 έχει διακρίνουσα $\Delta=-7<0$ άρα δεν έχει ρίζες και επειδή ο συντελεστής του x^2 είναι $1>0$ τότε $x^2-x+2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για κάθε x < - 1 είναι $v(x)\neq0$ και επειδή η v είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-\infty,-1)$.

Είναι $v(-2)=e^{f(-2)}-1=e^{-8}-1<0$, άρα $v(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)$, οπότε:

$\left|e^{f(x)}-1\right|=\left|e^{x^3+x+2}-1\right|\Leftrightarrow-e^{f(x)}+1=-e^{x^3+x+2}+1\Leftrightarrow e^{f(x)}=e^{x^3+x+2}\Leftrightarrow f(x)=x^3+x+2$.

Για κάθε x > - 1 είναι $v(x)\neq0$ και επειδή η v είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-1,+\infty)$.

Είναι $v(0)=e^{f(0)}-1=e^2-1>0$, άρα $v(x)>0$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$, οπότε:

$\left|e^{f(x)}-1\right|=\left|e^{x^3+x+2}-1\right|\Leftrightarrow e^{f(x)}+-1=e^{x^3+x+2}-1\Leftrightarrow e^{f(x)}=e^{x^3+x+2}\Leftrightarrow f(x)=x^3+x+2$

Επειδή για $x=-1$ είναι $f(-1)=0$ τελικά είναι $f(x)=\begin{cases}x^3+x+2, & x\neq-1\\ 0, & x=-1\end{cases}=x^3+x+2,\ x\in\mathbb{R}$.

β) Για το πεδίο ορισμού της $f\circ g$ πρέπει $\begin{cases}x\in D_g\\ g(x)\in D_f\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq0\\ g(x)\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow x\neq0$

Άρα είναι $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}+2$, $x\neq0$.

γ) Έστω $h(x)=(f\circ g)(x)-5=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}+2-5=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}-3$, $x>0$. Για κάθε $x_1,x_2>0$ με

$$x_1<x_2\Rightarrow\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{x_1^3}>\frac{1}{x_2^3}\\ \frac{1}{x_1}-5>\frac{1}{x_2}-5\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_1}-5>\frac{1}{x_2^3}+\frac{1}{x_2}-5\Rightarrow h(x_1)>h(x_2).$$

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$. Επίσης η h είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών.

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}-3\right)=+\infty$ άρα υπάρχει $\alpha>0$ πολύ κοντά στο 0 τέτοιο ώστε $f(\alpha)>0$.

Είναι επίσης $h(1)=2-3=-1<0$ άρα έχουμε ότι $h(\alpha)h(1)<0$ άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_1\in(\alpha,1)\subseteq(0,1)$ τέτοιο ώστε $h(x_1)=0$ και επειδή η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ τότε το x_1

Askisopolis

είναι μοναδικό.

Για $0 < x < x_1 \overset{h\searrow}{\Rightarrow} h(x) > h(x_1) = 0$ και για $x > x_1 \overset{h\searrow}{\Rightarrow} h(x) < h(x_1) = 0$.

Άρα $\lim\limits_{x \to x_1^-} \dfrac{1}{(f \circ g)(x) - 5} = \lim\limits_{x \to x_1^-} \dfrac{1}{h(x)} = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to x_1^+} \dfrac{1}{(f \circ g)(x) - 5} = \lim\limits_{x \to x_1^+} \dfrac{1}{h(x)} = -\infty$

Άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_1} \dfrac{1}{(f \circ g)(x) - 5}$.

δ) Είναι $M(x(t), y(t))$ με $y(t) = f(x(t)) = x^3(t) + x(t) + 2$ και $x'(t) = 1 \text{ cm/sec}$.

Οι προβολή του Μ στον άξονα x΄x είναι το σημείο $A(x(t), 0)$ και αντίστοιχα στον y΄y το σημείο $B(0, y(t))$. Άρα το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι : $E(t) = (OA)(OB) = x(t)y(t) = x^4(t) + x^2(t) + 2x(t)$

Είναι $E'(t) = 4x^3(t)x'(t) + 2x(t)x'(t) + 2x'(t) = 4x^3(t) + 2x(t) + 2$

Έστω t_0 η χρονική στιγμή που διέρχεται από το σημείο Κ τότε $x(t_0) = 1$ άρα:

$E'(t_0) = 4x^3(t_0) + 2x(t_0) + 2 = 4 + 2 + 2 = 8 \text{ cm}^2/\text{sec}$

Askisopolis